Τι σχέση έχουν οι Onirama με το θεώρημα του Rolle ;

(ή και ποία η κοινή ιδέα μεταξύ των πλέον διάσημων θεωρημάτων του απειροστικού λογισμού ,Rolle Lagrange, Bolzano & Brower!)

«…Ότι ανεβαίνει κατεβαίνει μια μέρα…»

Onirama



Γιάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός -Οικονομολόγος

Τα μαθηματικά θεωρήματα που δεν είναι γεωμετρικά, πάρα πολλές φορές κρύβουν ένα αναφορικό γεωμετρικό νόημα που τα καθιστά **σχεδόν προφανή**. Η επαχθής παράδοση του φορμαλισμού, εμποδίζει να αναδειχθεί, ότι πίσω από τα επώνυμα, ή περίπλοκα (εκ πρώτης όψεως πάντα) θεωρήματα, **κρύβονται πάντα απλές ,απλούστατες ιδέες, απλούστερες της απλότητος που λέει και ο Σταυρίδης σε κάποια Ελληνική ταινία!) .** Τα μαθηματικά –είναι αλήθεια- φέρουν διάφορες αμαρτίες. Κρύβεται (ή κρυβόταν έως πρόσφατα) **η εποπτεία ως εχθρός της αφαίρεσης** και της γενίκευσης, **αποσιωπούνται οι εμπειρικές ή πειραματικές συνθήκες ανακάλυψης των θεωρημάτων**, **προβάλλεται μόνο η «εκφώνηση-απόδειξη»** και κάπου εκεί επέρχεται η δυσφήμιση των ίδιων των μαθηματικών, ενώ **είναι η γοητευτικότερη επιστήμη που υπάρχει**. (Το σκέφθηκα πολύ να γράψω συναισθηματική αποστροφή στο άρθρο ως αντεπιστημονική, αλλά αγανάκτησε και ο εαυτός μου! Να φοβόμαστε να γράψουμε ότι τα μαθηματικά είναι ωραία, επειδή δεν έχουμε δώσει σαφή…ορισμό για το ωραίο;)

Να διατυπώσουμε κάποια ερωτήματα:

Ποια σπουδαία ιδέα κρύβεται πίσω από το **θεώρημα του Rolle;**

Ποία τρισμέγιστη ιδέα κρύβεται πίσω από το **θεώρημα της Μέσης Τιμής(του Langrange) ;**

Ποία συγκλονιστική λογική κρύβεται πίσω από το επώνυμο **θεώρημα του Bolzano ;**

Τι το απίστευτο κρύβεται πίσω από το **θεώρημα του Σταθερού σημείου(του Brower)** ;

Λυπάμαι, αλλά πίσω απ΄αυτά τα σπουδαία περιώνυμα , επώνυμα θεωρήματα κρύβονται **αφόρητα απλές κοινότυπες ιδέες, απλούστατα πράγματα, όχι πολύπλοκα, όχι περίεργα, πράγματα που μπορούν να καταλάβουν ακόμα και παιδιά του Δημοτικού Σχολείου.**

Να ξεκινήσουμε από τον Rolle:

Η ΙΔΕΑ:

Αν βρίσκομαι σε ένα δεδομένο ύψος πάνω από ένα επίπεδο και θέλω να πάω πάρα δίπλα, σε κάποια άλλη θέση που είναι στο ίδιο ύψος , τότε αρχικά, **ή**



θα προχωρήσω οριζόντια, ή θα ανέβω ή θα κατέβω.

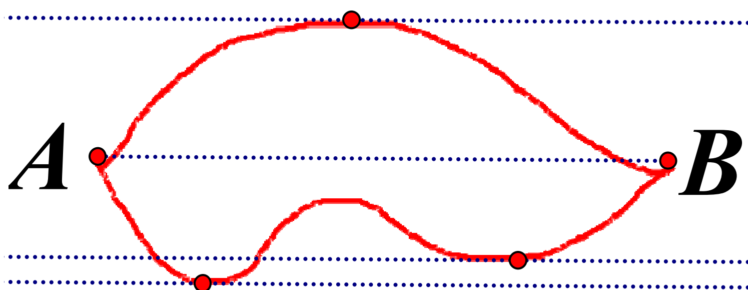
Κάποια εικόνα σαν την διπλανή:

1) Αν πάς διαρκώς οριζόντια από το Α στο Β, έχει καλώς!
2) Αν ξεκινώντας από το Α για να πάς στο Β κάποια στιγμή ανέβεις, τότε για να πάς στο Β , κάποια στιγμή θα χρειαστεί να …..κατέβεις! (Σιγά την φιλοσοφία! Αυτή είναι όλη η κεντρική ιδέα των Onirama!)
3) Αν ξεκινώντας από το Α για να πάς στο Β κατέβεις, τότε για να φθάσεις στο Β, κάποια στιγμή θα χρειαστεί να ….ανέβεις! (Σιγά τα …ωά!)

Η αλήθεια είναι ότι πηγαίνοντας από το Α στο Β, χρειάζεται να πάμε επί πλέον πάνω σε μια **λεία τροχιά.** Και όχι μόνο λεία τροχιά, αλλά **να μην πισογυρίσουμε**, ούτε να σταματήσουμε την προς τα δεξιά πορεία μας. Αυτές είναι φυσικές κινήσεις , όπου αν κινείται ένα σώμα με ΜΑΖΑ, δεν μπορεί παρά να ακολουθήσει τέτοια λεία τροχιά. (πάντα προς τα δεξιά και να μην σταματήσουμε να πηγαίνουμε προς τα δεξιά)

Ε! ….. Αν πηγαίνουμε ΕΤΣΙ, σε κάποια στιγμή, η ταχύτητά μας, θα γίνει μόνο οριζόντια και δεν θα έχει κατακόρυφη συνιστώσα. Αυτό γίνεται την στιγμή, όπου εκεί που ανεβαίνεις, αρχίζεις να κατεβαίνεις (ή να πηγαίνεις οριζόντια) Αν δηλαδή ανεβαίνουμε σε ένα βουνό, πατάμε πάντα και μονίμως σε κεκλιμένο ανηφορικό επίπεδο. Αυτά όσο ανεβαίνουμε. Πριν αρχίσουμε να κατεβαίνουμε για να φθάσουμε στο ίδιο ύψος πάλι (στην άλλη πλαγιά του βουνού) ΚΑΠΟΙΑ ΣΤΙΓΜΗ, ΘΑ ΠΑΜΕ ΚΑΙ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ. Το «οριζόντια» είναι το ενδιάμεσο μεταξύ του «ανεβαίνω» και «κατεβαίνω» Όταν ανεβαίνεις, πριν κατέβεις, θα χρειαστεί να πάς έστω και στιγμιαία οριζόντια, και ομοίως , όταν κατεβαίνεις, πριν αρχίσεις να ανεβαίνεις, θα χρειαστεί να πάς έστω και στιγμιαία οριζοντίως.

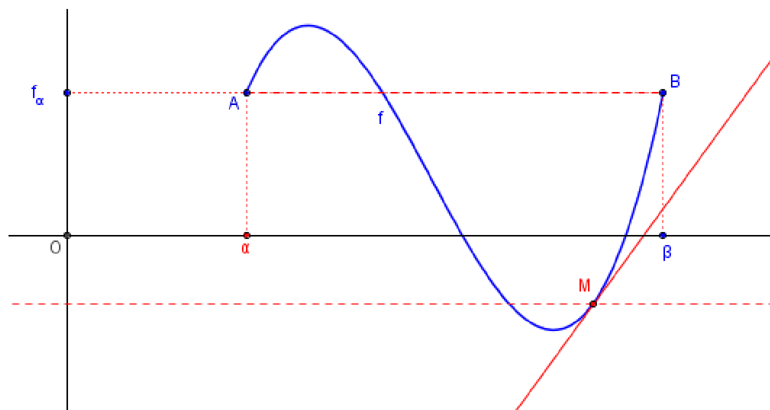
Κοίτα και την εικόνα:



Μετακινούμενοι από το Α στο ισοϋψές Β πάνω σε μια λεία συνεχή καμπύλη, αφού αρχικά ανέβουμε, και πριν κατέβουμε, θα έχουμε φθάσει σε κορυφή! Εκεί , η κορυφή, είναι για έστω και λίγο οριζόντια . Είναι η εφαπτόμενη που είναι παράλληλη στην οριζόντια ΑΒ (Αφού τα Α, Β είναι ισοϋψή, ορίζουν την διεύθυνση του οριζόντιου.

Και τι λέει το Θεώρημα του Rolle;

Κοιτάξτε το διπλανό σχήμα:



Αν f(α)=f(β) και συνδέσω τα ισοϋψή σημεία (α, f(α)) και (β,

f(β)) με την μπλε συνεχή και λεία γραμμή που παριστάνει συνάρτηση, τότε σε κάποια θέση ανάμεσα στα α και β (στο διάστημα (α,β)) θα υπάρχει μια ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ θέση $(\chi_0, f(\chi_0))$ όπου θα έχω τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο, όπου δηλ. η εφαπτομένη ευθεία σε αυτό το σημείο θα είναι παράλληλη με τον άξονα τον χχ' (που είναι παράλληλος με την ΑΒ) (Η γεωμετρική σημασία της παραγώγου θεωρείται γνωστή)

Να δούμε το **Θεώρημα της Μέσης Τιμής;** Αυτό είναι μια **γενίκευση του Θεωρήματος του Rolle.** Να δούμε και αυτού την ιδέα:

Ξεκινάμε πάντα με λείες και συνεχείς τροχιές και αυτή την φορά θέλουμε να πάμε από ένα σημείο Α σε ένα ΨΗΛΩΤΕΡΟ σημείο Β.

Η ΙΔΕΑ:

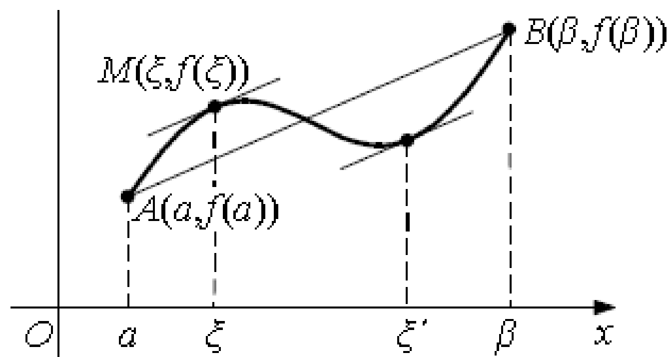
Αν ξεκινήσεις από το Α και πάς με ευθεία στο Β, έχει καλώς. Η ΑΒ έχει κάποια κλίση. Αν ξεκινήσεις από το Α με μεγαλύτερη κλίση, από την κλίση του ΑΒ, και πορεύεσαι συνέχεια, δεν θα φθάσεις ΠΟΤΕ στο Β . Αφού ξεκινάς με κλίση μεγαλύτερη του ΑΒ, για να φθάσεις στο Β, θα πρέπει αναγκαστικά να πάς και κάποιο διάστημα όπου η κλίση θα είναι ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ από του ΑΒ. Όμως από κλίση μεγαλύτερη του ΑΒ να πάμε σε κλίση ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ του ΑΒ, θα μεσολαβήσει έστω και για μια στιγμή, κλίση ΙΣΗ με ΑΒ. Αυτό είναι το περίφημο Θ.Μ.Τ.

Η μαθηματική του διατύπωση είναι:

«Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta) : f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$».

Φυσικά η παραπάνω μαθηματική διατύπωση φαντάζει δύσκολη, για όποιον δεν γνωρίζει να ερμηνεύσει το θεώρημα ως προς το αναφορικό του γεωμετρικό νόημα που προείπαμε.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης στην οποία εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. βοηθά, αλλά χρειάζεται μεγαλύτερη εμβάθυνση στην ιδέα , η οποία **ΤΕΛΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΑΠΛΗ**.



Και το σχήμα: Ξεκινάμε από το Α, ανεβαίνουμε με μεγαλύτερη κλίση από την ΑΒ, και πριν αρχίσουμε να κατεβαίνουμε με μικρότερη κλίση από την ΑΒ, μεσολαβεί κλίση ίση με ΑΒ, στο σημείο

(ξ, f(ξ)) (όπως και στο ξ΄ παρακάτω).

Η περεταίρω όμως αφαίρεση στην ιδέα του σχήματος, είναι <u>η πιο απλή ιδέα</u> που λέει , ότι από μεγαλύτερη τιμή από δεδομένη , να πάμε σε μικρότερη τιμή από την δεδομένη (με συνεχή διαδικασία) θα περάσουμε και από την ίση με την δεδομένη τιμή.

<u>Ακριβώς η ίδια ιδέα κρύβεται και στο θεώρημα του Bolzano.</u>

<u>Η ΙΔΕΑ:</u>

Για να πάς από ένα σημείο που είναι στο πάνω ημιεπίπεδο που ορίζει ο χχ΄στο κάτω, με συνεχή γραμμή, πρέπει πρώτα να τμήσεις τον χχ΄. Δηλ. η ίδια ιδέα που κρύβει και το ΘΜΤ.

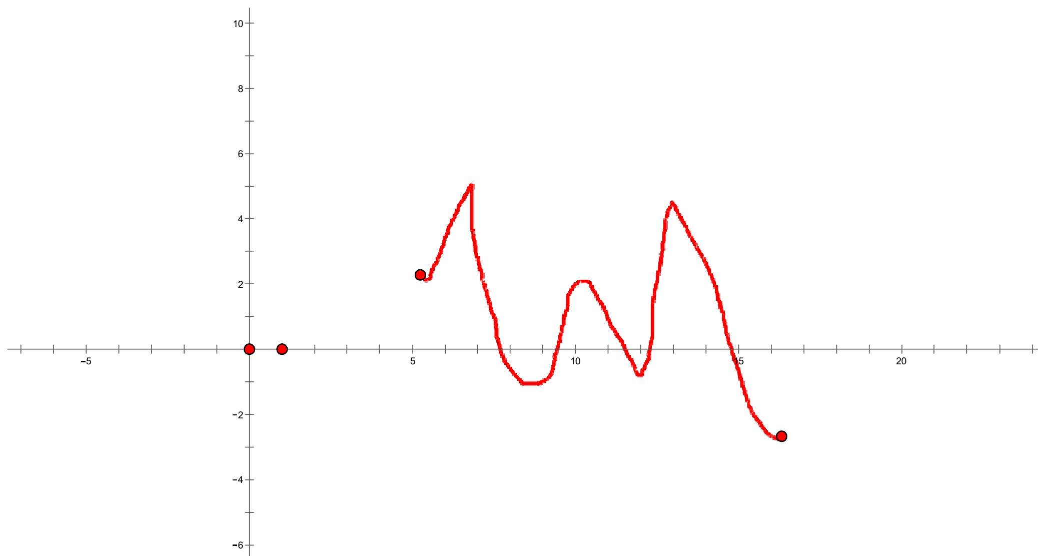
<u>Η μαθηματική διατύπωση:</u>

« Αν έχω μια συνεχή συνάρτηση f στο [α,β] και f(α)f(β)<0 τότε στο διάστημα [α,β] , έχω μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 »

<u>Η μαθηματική –ερμηνεία:</u>

Αν έχω δύο σημεία (α, f(α)) και (β, f(β)) που είναι εκατέρωθεν του χχ΄, τότε αν τα συνδέσω με μια συνεχή γραμμή (=μονοκονδυλιά) που να παριστάνει συνάρτηση θα τμήσω οπωσδήποτε την χχ΄ σ το διάστημα [α,β]

<u>Η γεωμετρική εποπτεία :</u>



<u>Η πιο αφαιρετική ιδέα:</u>

Για να πάς από θετικές τιμές σε αρνητικές, με συνεχή τρόπο, θα περάσεις και από το 0 . Ή για να πάς από αρνητικές σε θετικές, πάλι θα περάσεις από το 0 .

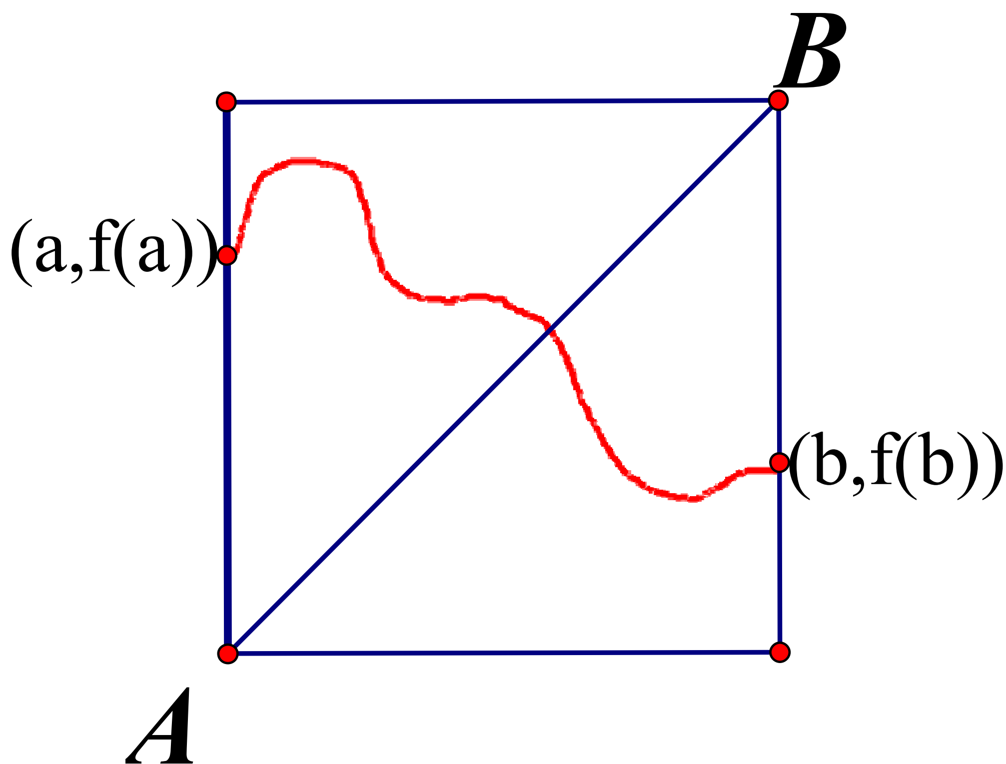
<u>Το θεώρημα του Σταθερού σημείου του Brower.</u>

Είναι μια γενίκευση του Bolzano. Και βεβαίως υπάρχουν πολλές γενικεύσεις –επεκτάσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου (Τεράστια σημασία στην Μικροοικονομία όπου μελετά την ισορροπία τιμών ,βλέπε και θεώρημα Arrow)

<u>Η μαθηματική του διατύπωση (η πιο απλή):</u>

Αν έχω μια συνάρτηση φ: [α,β]→[α,β] που να είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\chi_0 \in [\alpha,\beta]$ έτσι ώστε $\phi(\chi_0)=\chi_0$

<u>Η μαθηματική –Γεωμετρική ερμηνεία:</u>



Αν έχουμε ένα τετράγωνο και θέλουμε να πάμε από ένα σημείο της αριστερής πλευράς σε ένα σημείο της δεξιάς πλευράς, με συνεχή γραμμή, τότε υποχρεωτικά θα τμήσουμε την διαγώνιό του. Στο σημείο τομής με την διαγώνιο, έχουμε σημείο με τετμημένη =τεταγμένη. Δηλ . έχω $\phi(\chi_0)=\chi_0$

Η ΙΔΕΑ:

Το τετράγωνο χωρίζεται με την διαγώνιο σε δύο τρίγωνα, όπου στο πάνω τρίγωνο, η τεταγμένη >τετμημένη και στο κάτω τρίγωνο, η τεταγμένη <τετμημένη . Δηλ στο πάνω τρίγωνο έχουμε $\psi>\chi$ κα ιστο κάτω $\psi<\chi$ για να πάμε με μια συνεχή διαδικασία (γραμμή) από σημείο του ενός τριγώνου στο άλλο θα πρέπει να περάσουμε από σημείο, όπου $\chi=\psi$.

Πάλι δηλαδή βλέπουμε την ίδια ιδέα!

Συμπεράσματα :

- Τα πλέον σοβαρά θεωρήματα του απειροστικού λογισμού υποκρύπτουν απλές ιδέες .
- Όχι μόνο υποκρύπτουν απλές ιδέες, αλλά –με την κατάλληλη αφαίρεση- φαίνεται να υποκρύπτουν την **…..ΙΔΙΑ ΙΔΕΑ!**
- Επαληθεύεται, άλλη μια φορά, ότι και στα μαθηματικά, όπως και στην Φυσική, οι νόμοι (στα μαθηματικά τα βασικά θεωρήματα) είναι κατά βάθος απλά.
- Επαληθεύεται, ότι δεν υπάρχουν πράγματα δύσκολα και πράγματα εύκολα, αλλά πράγματα που κατανοούμε και πράγματα που δεν κατανοούμε.
- Δεν υπάρχει λόγος να μην εκτίθενται οι ιδέες αυτές , έστω και αν η εκλαΐκευση ελλοχεύει κινδύνους) Μάλιστα η γεωμετρική έκθεση της ιδέας πριν την μαθηματική φορμαλιστική παρουσίασή της, επιβάλλεται για λόγους ψυχολογικής στάσης των μαθητών μας προς τα ίδια τα μαθηματικά.

- Είναι άδικο μέσα στην ασκησιοθηρία των διαβόητων Πανελλήνιων εξετάσεων που έχουν στρεβλώσει την γνώση (όχι μόνο την μαθηματική) να μην διατίθενται τρία λεπτά για την βασική ιδέα των Onirama « Ότι ανεβαίνει κατεβαίνει» (και για μια στιγμή οριζοντιώνεται που λέει και ο Rolle!)